全微分可能性の補足

藤原和将

2021 年 11 月 10 日

$D \subset \mathbb{R}^2$ $(D \ni \{0\})$ を開集合とする．$f : D \to \mathbb{R}$ が原点に於いて全微分可能であるとは，f が 2 つの定数 A, B を伴って，

$$f(x,y) = Ax + By + o(|(x,y)|)$$

を満たす事である．このノートでは，原点に於ける全微分可能性の判定方法に就いて見る．

f が原点で全微分可能である事を判定する方法として，次がよく用いられる．

Proposition 1. $f \in C^1(D)$ ならば f は原点で全微分可能である．特に，

$$A = \partial_x f(0,0), \quad B = \partial_y f(0,0)$$

である．

一方で，f の極座標表示が特定の形をしているならば，原点での全微分可能性の判定は容易である．

Proposition 2. $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ が $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ を満たすとする．$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\varphi(\theta)$$

で与える．この時，f が原点に於いて全微分可能である事と

$$f(x,y) = Ax + By \tag{1}$$

なる実数 A, B が存在する事は同値である．

Remark 1. 上の命題を言い換えれば，f が原点に於いて全微分可能である事と，$\varphi(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta$ である事が同値である．また，f が原点に於いて全微分可能である事と，f のグラフが原点を含む平面となることが同値である．特に，原点で全微分可能であるならば，f は $\mathbb{R}^2$ 上至る所全微分可能である．

Proof. (1)ならば，全微分可能性の定義より f は全微分可能である．f が全微分可能であるならば，2 つの実数 A, B が存在して，

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0) = (A\cos\theta + B\sin\theta)r + o(r)$$

である．$f(0,0) = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= \lim_{r \searrow 0} \frac{f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)}{r} \\
&= \lim_{r \searrow 0} \frac{(A\cos\theta + B\sin\theta)r + o(r)}{r} \\
&= A\cos\theta + B\sin\theta
\end{aligned}$$

であるから, $o(r)=0$ である. 従って, $f(x,y)=Ax+By$ を得る. $\square$

Remark 2. 上記命題より, 例えば,

$$b(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{if} \quad (x,y)\neq 0,\\ 0 & \text{if} \quad (x,y)=0\end{cases}$$

は原点に於いて連続且つ偏微分可能であるが, 全微分不能である. 実際

$$b(r\cos\theta, r\sin\theta)=r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$$

である. $b(x,y)$ は一次式ではないので, b は原点に於いて全微分不能である. 偏導関数が原点で不連続になっている事は, *Proposition 1*の対偶命題から従う. また, *Remark 4* の計算から直接見て取れる.

Remark 3. F を f の極座標表示とすれば,

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=\frac{\partial}{\partial r}F(0,0)=\varphi(0),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=\frac{\partial}{\partial r}F(0,\pi/2)=\varphi(\pi/2)$$

である.

Remark 4. 上記命題で φ が微分可能な場合に於いて, f の偏導関数の挙動を見てみよう. F を f の極座標表示とすれば, $(x,y)\neq(0,0)$ に於いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}F(r,\theta)-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}F(r,\theta)\\&=\varphi(\theta)\cos\theta-\varphi'(\theta)\sin\theta,\\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)&=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}F(r,\theta)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}F(r,\theta)\\&=\varphi(\theta)\sin\theta+\varphi'(\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

である. もし, 上記 2 つの偏導関数が原点に於いて連続であるならば, 2 つの偏導関数は θ に依存しない. 即ち,

$$\varphi(\theta)\cos\theta-\varphi'(\theta)\sin\theta=A, \quad \varphi(\theta)\sin\theta+\varphi'(\theta)\cos\theta=B$$

なる定数 A,B が存在する.

$$\varphi(\theta)=\cos\theta\{\varphi(\theta)\cos\theta-\varphi'(\theta)\sin\theta\}+\sin\theta\{\varphi(\theta)\sin\theta+\varphi'(\theta)\cos\theta\}=A\cos\theta+B\sin\theta$$

より, *Proposition 1*と *Proposition 2*の関係が分かる.

参考

鈴木武, 柴田良弘, 田中和永, 山田義雄著, 理工系のための微分積分 I, 2007/4/1 内田老鶴圃出版 (ISBN: 4753601811)